For the other planets the formulas (9 and 9a) are performed. Those are the planets, which are in the beginning of the planet subsystem by the value of the dimensionless moment of inertia (Mercury and Jupiter), as well as the planets with the reverse rotation (Venus and Uranus). The calculation results are given in Table 1.

The coefficient 4/3 has been applied before for the comparative evaluation of quantum transitions with different complexity types [4]. In this research the average ratio of the angles by the experimental data [3,5,6] given in Table 3 also has the value 1.336 ≈ 4/3.

Table 3 – Ratio of rotation angles of planets by [3,5,6]

Planet	Mercury	Venus	Earth	Mars	**‹Θ₂›**
Θ_2	87.00	87.00	86.90	82.00	**85.73**
Planet	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptune	**‹Θ_1›**
Θ_1	66.556	64.80	64.30	61.00	**64.16**

The average value $\Theta_2/\Theta_1 = 1.336 \approx 4/3$.

For the value δ the influence of the medium density distribution is taken into account via the transition factor from one distribution level to another. Since for Jupiter in Table 2 the value I^* is less in comparison with Earth's I^* in 1.45 times, therefore, in the calculations $\delta = 0.9478^{1/2}$. On the contrary with Jupiter, for Neptune I^* increases in 1.45 times, therefore, in the calculations $\delta = 0.96793^2$.

All the calculation results are in good accord with the experimental data.

Conclusions

1. Semi-empirical equations of the dependence of rotational and orbital motion of planets are obtained.

2. Many structural-dynamic processes in macro- and microsystems, including the specifics of formation of direct or reverse rotation of the planets are explained based on the previously proposed method to evaluate the corpuscular-wave mechanism.

3. The given calculations of rotation angles of the planets are within the accuracy of the experimental data.

References

1. Erden-Gruz, T. Basics of matter composition. Moscow, **1976**, 438.
2. Duboshin, G.N. Celestial mechanics. Nauka, Moscow, **1978**, 456.
3. Panteleev, V.L. Physics of Earth and planets. Lectures. MSU. Moscow, http://www.astronet.ru/db/msg/1169697/node17.html
4. Korablev, G.A. Spatial-energy parameter and its application in research. LAP LAMBERT Academic Publishing. Germany, **2016**, 1-65.
5. Encyclopedia in physics. Moscow, **1988**, *1*, 704; **1990**, *2*, 704; **1992**, *3*, 672.
6. Allen, K.U. Astrophysical magnitudes. Mir, Moscow, **1977**, 446.

К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ТЕКУЩИХ ПРОБЛЕМ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Нужнов Ю.В.

Доктор физико-математических наук

Институт проблем горения, Казахстан

Аннотация

Вскрываются некоторые текущие проблемы статистического моделирования мелкомасштабной структуры турбулентности. Основное внимание уделяется анализу и решению проблемы, связанной с учётом эффектов внутренней перемежаемости с последующим обоснованием логнормального закона распределения значений частично усреднённой диссипации энергии в диссипативной жидкости турбулентного течения. Тестирование данного закона показало его соответствие с опытными данными.

Ключевые слова: турбулентность, перемежаемость, моделирование.

TO THE SOLUTION OF SOME CURRENT PROBLEMS OF STATISTICAL MODELING OF THE SMALL-SCALE TURBULENCE

Nuzhnov Yu.V.

Doctor of Physical and Mathematical Sciences

Institute of Combustion Problems, Kazakhstan

Abstract

Some current problems of statistical modeling of the small-scale turbulence structure are revealed. The focus is on analyzing and solving the problem, connected with taking into account the effects of internal intermittency with the subsequent justification of the lognormal distribution law for the values of the partially averaged energy

dissipation in the dissipative fluid of a turbulent flow. The testing of this law showed its compliance with the experimental data.
Ключевые слова: turbulence, intermittence, modeling.

Введение

Проблема эффективного учёта гидродинамической перемежаемости в статистическом моделировании развитых турбулентных течений хорошо известна. Особенно остро эта проблема проявляется в моделировании мелкомасштабной структуры турбулентности, разработанной Колмогоровым и известной как теория *K-62* [1]. Выясняется, что в *инерционном интервале масштабов* предположение о локальной изотропности мелкомасштабной турбулентности в общем не выполняется; гипотеза о логнормальном законе распределения значений частично усреднённой диссипации турбулентной энергии не нашла своего убедительного подтверждения; универсальные постоянные Колмогорова C_k, C_ε и μ, входящие в выражения структурных функций $S^{(n)}(r) = \langle v^n(r)\rangle \sim r^{\zeta(n)}$ со "скейлинговым" показателем $\zeta(n)$ для *n*-ого момента разности скоростей $v(r) = \big(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\big)\cdot \boldsymbol{r}/r,\ r = |\boldsymbol{r}|$ и их спектров таковыми не являются. Такой вывод следует из многочисленных теоретических и экспериментальных данных [2-5], представленных также в [6-9] и др..

В этой связи были разработаны различные модели (например, *β-model* и *log-Poisson model*, см. [10]) с попыткой устранить указанные недостатки. Однако во всех этих моделях предполагалось, что структура мелкомасштабной турбулентности в *инерционном интервале* является однородной (точнее локально изотропной), тогда как постоянные, входящие в выражения структурных функций $S^{(n)}$, считались универсальными. В то же время "мучительный" поиск универсальных постоянных Колмогорова не увенчался успехом. Так, например, огромное число проведенных экспериментов дало различные значения коэффициента μ в диапазоне разброса $0.14 < \mu < 0.5$, [3, 6]. Более того, результаты экспериментальных исследований [3] убедительно показали зависимость этого коэффициента от величины коэффициента внешней перемежаемости γ.

Цель нашей статьи показать, что именно теория Колмогорова является тем фундаментом, на котором возможно построение теории мелкомасштабной турбулентности, свободной от указанных недостатков. В частности мы покажем, что логнормальный закон распределения вероятностей частично усредненной диссипации энергии ε_l справедлив только для диссипативной жидкости турбулентного течения, и что только для этой жидкости коэффициент μ является универсальной постоянной, тогда как для турбулентной жидкости он представляет собой статистическую величину, которая зависит от величины γ.

Основные положения теории ASMTurbS

Автономность моделирования гидродинамических полей диссипативной жидкости [2] приводит к теории с идеологией метода *ASMTurb*, [11]. Поэтому нашу теорию мелкомасштабной турбулентности логично назвать теорией *ASMTurbS*, т.е. теорией автономного статистического моделирования мелкомасштабной турбулентности. Дадим основные положения этой теории.

В [2] было введено понятие диссипативной жидкости (с индексом d) турбулентного течения. Считалось, что любое турбулентное течение содержит в себе пространственно-временные области с турбулентной G_t и нетурбулентной G_n жидкостью, то есть обобщенная область такого течения $G = G_t + G_n$. При этом, как это хорошо известно [12], и в самой турбулентной жидкости существуют области с чрезвычайно сильной "активной" диссипацией турбулентной энергии $\varepsilon_d \gg \langle\varepsilon\rangle_t$, которые чередуются с областями, где диссипация не так значительна, $\varepsilon_{nd} \ll \langle\varepsilon\rangle_t$, $G_t = G_{td} + G_{tnd}$. Это явление принято называть "внутренней" перемежаемостью, [12].

В этой связи в [2] были приняты новые гипотезы подобия.

Гипотеза 1. Все положения статистической теории мелкомасштабной турбулентности Колмогорова справедливы только для *диссипативной* жидкости турбулентного течения.

Гипотеза 2. Все параметры и коэффициенты, входящие в теорию Колмогорова, являются *статистическими*.

Согласно принятым гипотезам, логнормальный закон распределения значений частично усредненной диссипации турбулентной энергии ε_l справедлив только для диссипативной жидкости, в то время как все коэффициенты в этой (диссипативной) жидкости являются универсальными постоянными.

Как выясняется, плотность распределения вероятностей (*PDF*) случайной величины $\varepsilon_l = \varepsilon_l(\boldsymbol{x}, t)$ (как и для любой другой случайной величины f) в обобщённой области турбулентного течения G определяется выражением

$$P(\varepsilon_l) = \gamma_d P_d(\varepsilon_l) + \gamma_{nd} P_{nd}(\varepsilon_l) + (1-\gamma) P_n(\varepsilon_l)$$

где $\gamma_d, \gamma_{nd}, \gamma$ – коэффициенты перемежаемости как вероятности наблюдения диссипативной, недиссипативной и турбулентной жидкости в области G, $\gamma_d = \gamma\gamma_{td}$, причем γ_{nd}=$\gamma(1-\gamma_{td})$, где γ_{td} – коэффициент перемежаемости диссипативной жидкости внутри турбулентной, т.е. в области G_t.

Согласно *гипотезе 1*, условная *PDF* величины ε_l, то есть *CPDF* $P_d(\varepsilon_l)$, для диссипативной жидкости G_d приобретает *вид*

$$P_d(\varepsilon_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2_{*ln\varepsilon_l}\,\varepsilon_l} exp\left(-\frac{\left(ln\,\varepsilon_l/\langle\varepsilon\rangle_d + \sigma^2_{*ln\varepsilon_l}\right.}{2\sigma^2_{*ln\varepsilon_l}}\right. \quad (2)$$

с условием нормировки $\int_0^\infty P_d(\varepsilon_l)d\,\varepsilon_l = 1$ и с дисперсией $D_d ln\varepsilon_l = \sigma^2_{*ln\varepsilon_l}$, то есть с дисперсией логарифма случайной величины ε_l в виде $\sigma^2_{*ln\varepsilon_l} = \langle (ln\,\varepsilon_l - \langle ln\,\varepsilon_l\rangle_d)^2\rangle_d$. Условное статистическое среднее $\langle\varepsilon_l\rangle_d = \int_0^\infty \varepsilon_l P_d(\varepsilon_l)d\,\varepsilon_l$.

Считается при этом, что величина $\langle\varepsilon_l\rangle_d$ зависит от размера частичного усреднения l и что $\langle\varepsilon_l\rangle_d \cong \langle\varepsilon\rangle_d$ в случае $l = r_{min} \cong 10\eta$, где r_{min} – минимальный масштаб флуктуаций (вихрей) в инерционном интервале, $\eta = 1/k_\eta$ – масштаб Колмогорова, который по представленным в [7] данным принимает значения из диапазона 0.04÷ 0.4 мм в зависимости от числа Re, $2625 \leq Re_м \leq 10^8$.

Моделирование условных статистических моментов частично усреднённой диссипации $\langle\varepsilon_l^n\rangle_d$ требует подходящего выражения для дисперсии $\sigma^2_{*ln\varepsilon_l}$ в (2). Такое выражение в силу *гипотезы 1* совпадает по виду с гипотетическим выражением Колмогорова, то есть для диссипативной жидкости

$$\sigma^2_{*ln\varepsilon_l} = \langle\mu\rangle_d Ln(L_d/l) + A_d \quad (3)$$

где $\langle\mu\rangle_d = const$ и $A_d = const$. Отсюда следует, что

$$\langle\varepsilon_l^n\rangle_d = C_{Ad}^{(n)}\langle\varepsilon_l\rangle_d^n (l/L_d)^{-\langle\mu\rangle_d n(n-1)/2}$$

где коэффициенты $C_{Ad}^{(n)} = e^{A_d n(n-1)/2} = const$ при заданном значении n, и выражение для полного среднего $\langle\varepsilon_l^n\rangle = \gamma_d\langle\varepsilon_l^n\rangle_d$ с учетом $\langle\varepsilon_l\rangle_d = \langle\varepsilon\rangle_d$ в случае $l = r_{min} \cong 10\eta$ принимает вид

$$\langle\varepsilon_l^n\rangle = C_{Ad}^{(n)}\gamma_d\langle\varepsilon\rangle_d^n (l/L_d)^{-\langle\mu\rangle_d n(n-1)/2} \quad (5)$$

поскольку диссипация в недиссипативной G_{nd} и, тем более, в нетурбулентной G_n областях течения пренебрежимо мала, $\langle\varepsilon\rangle \cong \gamma\langle\varepsilon\rangle_t \cong \gamma_d\langle\varepsilon\rangle_d$ ввиду $\langle\varepsilon\rangle_t \cong \gamma_{td}\langle\varepsilon\rangle_d$ и $\gamma_d = \gamma\gamma_{td}$. В результате для продольных структурных функций *n-ого* порядка в диссипативной жидкости G_d мы получаем выражение

$$S_d^{(n)}(r) = \langle v^n\rangle_d = C_{kd}^{(n)}\langle\varepsilon\rangle_d^{\,n/3} r^{n/3}\left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_d(n)-n/3} \quad (6)$$

где L_d - интегральный масштаб течения диссипативной жидкости, $C_{kd}^{(n)} = const$,

$$\zeta_d(n) = n/3 - \langle\mu\rangle_d n(n-3)/18 \quad (7)$$

Выражение для полного статистического среднего мгновенных гидродинамических характеристик f приобретает согласно (1) следующий вид:

$$\langle f\rangle = \gamma_d\langle f\rangle_d + \gamma_{nd}\langle f\rangle_{nd} + (1-\gamma)\langle f\rangle_n$$

и согласуется с выражениями для полного и условного (для турбулентной жидкости) среднего [2],

$$\langle f\rangle = \gamma\langle f\rangle_t + (1-\gamma)\langle f\rangle_n, \langle f\rangle_t = \gamma_{td}\langle f\rangle_{td} + (1-\gamma_{td})\langle f\rangle_{tnd} \quad (9)$$

Согласно *гипотезе 2,* коэффициент μ представляет собой случайную величину со статистическим полным и условным средним, так согласно (9):

$$\langle\mu\rangle = \gamma\langle\mu\rangle_t + (1-\gamma)\langle\mu\rangle_n, \langle\mu\rangle_t = \gamma_{td}\langle\mu\rangle_d + (1-\gamma_{td})\langle\mu\rangle_{nd} \quad (10)$$

где $\langle\mu\rangle_d \equiv \langle\mu\rangle_{td}$ и $\langle\mu\rangle_{nd} \equiv \langle\mu\rangle_{tnd}$ являются универсальными постоянными.

Тестирование логнормального закона распределения диссипации

Наличие экспериментальных данных [13, 14] для значений входящего в выражение структурных функций $S_d^{(n)}(r)$ (6) "скейлингового" показателя степени $\zeta_d(n)$ (7) позволяет оценить справедливость полученного нами логнормального закона, именно оценить *CPDF* $P_d(\varepsilon_l)$ (2) путём тестирования показателя $\zeta_d(n)$ через посредство выбора подходящего значения коэффициента $\mu = \langle\mu\rangle_d = const$.

Действительно, в известных моделях мелкомасштабной турбулентности предполагается, что в инерционном интервале $\eta \ll r \ll L$ структура такой турбулентности является локально изотропной (напомним, что опытные данные [3, 4] этого не подтверждают). При этом в логнормальной модели *K-62* величина $\zeta(n) = n/3 - \mu n(n-3)/18$ входит в выражения для структурных функций $S^{(n)}(r)\sim r^{\zeta(n)}$. Именно такая зависимость экспериментально исследовалась в [13,14]. Полученные при этом данные использовались для тестирования показателя $\zeta(n)$ с целью оценить справедливость логнормального закона Колмогорова путем подходящего выбора величины коэффициента μ. В результате было установлено, что расчетная кривая $\zeta(n)$ с выбранными значениями μ, когда $\mu \geq 0.2$, отклоняется от опытных данных, когда $n \gg 1$ (для $\mu = 0.3$ отклонение начинается при $n = 6$ и увеличивается с ростом n).

Заметим теперь, что согласно теории *AS-MTurbS* мелкомасштабная турбулентность является локально изотропной только в диссипативной жидкости турбулентного течения. При этом структурные функции для течения диссипативной жидкости принимаются в виде $S_d^{(n)}(r)\sim(l/L_d)^{\zeta_d(n)-n/3}$ (6), где величина $\zeta_d(n)$ (7) содержит коэффициент $\mu = \langle\mu\rangle_d = const$.

На 0 представлены расчёты $\zeta_n = \zeta_d(n)$, выполненные по формуле (7) при различных значениях коэффициента $\mu = \langle\mu\rangle_d$ (опытные данные [13,14] соответствуют $Re_\lambda = 500 - 800$ и совпадают с представленными в [9] данными в диапазоне $2 \leq n \leq 10$). Видно, что расчётная полуэмпирическая (ввиду привлечения опытных данных) кривая 1 в случае $\langle\mu\rangle_d = 0.145$ даёт практически полное совпадение с опытными данными (результаты расчётов по β и *log-Poisson* моделям см., например, в [10]).

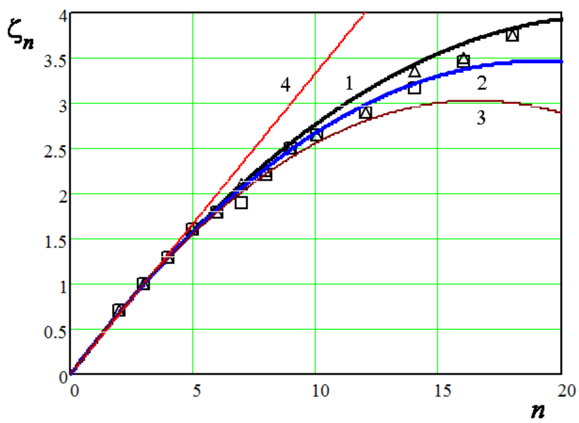
Первым результатом нашей теории является расчет экспоненциального коэффициента дробления вихрей $\langle\mu\rangle_t$ в зависимости от величины коэффициента γ. Для такого расчета требуются входящие в 0 значения коэффициентов $\langle\mu\rangle_d$ и $\langle\mu\rangle_{nd}$. При этом значение $\langle\mu\rangle_d = 0.145$ нами уже найдено. Значение же коэффициента $\langle\mu\rangle_{nd}$ можно оценить с помощью экспериментальных данных [3]. Из этих данных и полученных нами выражений 0 следует, что $\langle\mu\rangle_t = \langle\mu\rangle_{nd} \cong 0.32$ при $\gamma \to 0$, поскольку вероятность наблюдения турбулентной жидкости мала и, следовательно, величина коэффициента $\gamma_{td} \to 0$.

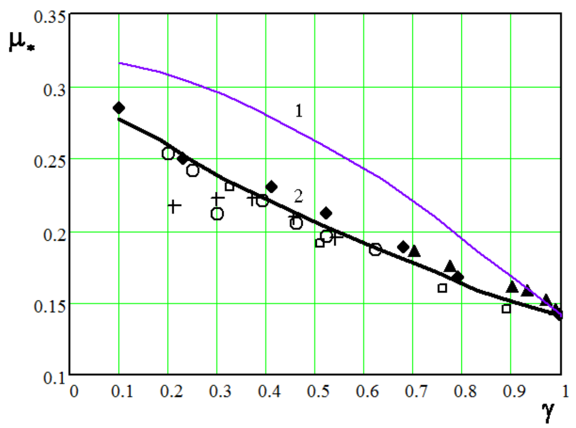
Расчет коэффициента $\langle\mu\rangle_t$ в зависимости от значений коэффициента γ представлен на 0. Здесь же представлен расчет полного среднего $\langle\mu\rangle$ с условием $\langle\mu\rangle = \langle\mu\rangle_n = \langle\mu\rangle_{nd}$ при $\gamma \to 0$. Как видно, значения $\langle\mu\rangle_t$ хорошо соответствуют опытным данным [3], выполненным для различных типов турбулентного течения. Видно также, что $\langle\mu\rangle_d = 0.145$ и $\langle\mu\rangle_{nd} \cong 0.32$, т.е. эти коэффициенты являются универсальными постоянными.

Заключение

Мы показали, что теория Колмогорова является тем фундаментом, на котором возможно дальнейшее эффективное построение теории мелкомасштабной турбулентности. В частности, учет внутренней перемежаемости диссипативной жидкости и предложенный нами логнормальный закон в виде *CPDF* $P_d(\varepsilon_l)$ (2) позволил определить как универсальное значение коэффициента $\langle\mu\rangle_d = 0.145$ (именно такое значение получено экспериментально в [3, 6]), так и найти зависимость коэффициентов $\langle\mu\rangle_t$ и $\langle\mu\rangle$ от величины коэффициента перемежаемости γ. При этом мы исключили некоторый указанный в [7] произвол в выборе размера частичного усреднения $l = r$, придав ему конкретное значение $l = r_{min} \cong 10\eta$. (Суть этого произвола заключается в том, что размер частичного усреднения в теории Колмогорова *K-62* должен быть достаточно мал, т.е. $r \sim \eta$ чтобы $\langle\varepsilon_l\rangle \cong \langle\varepsilon\rangle$, тогда как в инерционном интервале величина $r \gg \eta$, т.е может принимать большие значения, $r \gg 10\eta$). В этой связи результаты расчетов [2] требуют своего уточнения. К примеру, расчёт коэффициента Колмогорова C_k в [2] для течений с большим числом Re даёт неправдоподобно малое значение величины $r/L = 10^{-11}$ в случае $r/L_d = 10^{-7}$.

Как выясняется, для завершения теории *AS-MTurbS* нам предстоит решить ряд задач, связанных с определением основных статистических характеристик мелкомасштабной турбулентности. Основной трудностью при этом является определение взаимосвязи интегральных масштабов L_d/L, поскольку для интегрального масштаба течения диссипативной жидкости L_d нет никаких, в том числе экспериментальных, данных. Более того, представленные нами результаты указывают на необходимость детального экспериментального исследования мелкомасштабной структуры именно для диссипативной жидкости турбулентного течения.





Скейлинговые показатели ζ_n для структурных функций продольной скорости. Сплошные линии – расчёт при $\langle\mu\rangle_d = 0.145$ (1), $\langle\mu\rangle_d = 0.17$ (2), $\langle\mu\rangle_d = 0.2$ (3), $\langle\mu\rangle_d = 0$ (4) – соответствует теории K-41; значки – опытные данные Δ – [13], □ – [14].

Распределение значений коэффициентов μ_* в зависимости от величины коэффициента внешней перемежаемости γ. Сплошные линии – расчёт $\mu_* = \langle\mu\rangle$ (1), $\mu_* = \langle\mu\rangle_t$ (2); значки – опытные данные [3].

Литература

1. Kolmogorov A.N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structures of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds numbers// J. Fluid Mech., 1962. Vol.13. No1. P.82-85. (Колмогоров А.Н. Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса//In: Mecanique de la turbulence: Colloq. Intern. CNRS, Marseille, aout - sept. 1961/ На рус. и фр. яз. Paris. 1962. P. 447-458.)

2. Nuzhnov Yu.V. Some results of statistical modeling of the small-scale turbulence structure revealed with consideration of intermittency //IMECE. - California, San Diego 2013. - Volume 7A: Fluids Engineering Systems and Technologies. - 7p.

3. Kuznetsov V.R., Praskovsky A.A., Sabelnikov V.A. Fine-scale turbulence structure of intermittent

shear flow// J. Fluid Mech. - 1992. - Vol. 243. - P. 595-622.

4. Antonia R., Anselmet F., Chambers A. Assessment of local isotropy using measurements in a turbulent plane jet// J. Fluid Mech. 1986.Vol.163.P.365-391.

5. Browne L., Antonia R., Shah D. Turbulent energy dissipation in a wake//J.Fluid Mech. 1987. Vol.179. P.307-326.

6. Kuznetsov V.R., Sabelnikov V.A. Turbulence and Combustion. -Hemisphere, 1990. - 320p. (Кузнецов В.Р., Сабельников В.А. Турбулентность и горение. - М.: Наука, 1986. - 288с.)

7. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. - М.: Гидрометео-издат, 1996. - Т. 2. - 742с.

8. Yaglom A.M. Regularities of a small-scale turbulence in atmosphere and ocean// Inf. AN USSR. Physics of atmosphere and ocean. 1981. T.17. No.12. P.1235-1257.

9. Sreenivasan K.R., Antonia R.A. The Phenomenology of Small-Scale Turbulence// Annu. Rev. Fluid Mech. 1997. 29. P.435-472.

10. Frisch U. Turbulence. The Legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge University Press, 1995.-648p.

11. Нужнов Ю.В. Статистическое моделирование перемежающихся турбулент-ных течений.- Қазақ университеті, Алматы, 2015.- 300с.

12. Batchelor G.K., Townsend A.A., 1949. The nature of turbulent motion at large wave numbers. - Proe. Roy. Soc, A 199, No. 1057, P.238-255.

13. Anselmet F., Gagne Y., Hopfinger E.J., Antonia R.A. High-order velocity struc-ture function in turbulent shear flows// J. Fluid Mech- 1984. - Vol. 140. - P. 63-89.

14. Herweijer J.A., van de Water W. Universal shape of scaling functions in turbulence// Phys. Rev. Lett. - 1995 - Vol. 74. - P. 4651-4654.