ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

АЛГОРИТМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАР МНОЖЕСТВ И ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ

Джаваншир Ибрагим оглы Зейналов,
док. мат. наук, профессор Нахичеванский Государственный Университет, Азербайджанской Республики,г. Нахчыван
Мафтун Эйнулла оглы Алийев
канд. физ. наук, доцент Нахичеванский Государственный Университет, Азербайджанской Республики,г. Нахчыван,
Ильхам Гусейн оглу Сулейманов,
Гусейн Алакбар оглы Касумов,
Диссертант, Нахичеванский Государственный Университет, Азербайджанской Республики, г. Нахчыван.

Аннотация: В работе рассматривается алгоритм для численного решения задача оптимального управления относительно пар множеств которая представляет интерес при изучении нечеткого пар множества применение нейронных сетей к решению задачи.

Ключевые слова: алгоритм, оптимального управления, нечеткое множество, нейронных сетей, минимизации функционла.

AN ALGORITHM FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH RESPECT TO PAIRS OF SETS AND THE APPLICATION OF NEURAL NETWORKS TO THE SOLUTION OF THE PROBLEM.

Abstract: This paper describes the algorithm for the numerical solution of the optimal control problem relative to pairs of sets which is of interest in the study of fuzzy pairs many application of neural networks to solving the problem.

Keywords: Algorithm, optimal control, fuzzy set, neural networks, minimization of functions.

Пусть пара областей $d(t) = (D_1(t), D_2(t))$, характеризирующая изучаемый объект является решением следующей задачи

$$d'(t) = a(t)d(t) + v(t), t \in [0,T], \quad (1)$$

$$d(0) = d_0, \tag{2}$$

где $T > 0$ заданное число, $d(0) = (D_1(0), D_2(0))$, функции $a(t)$, $t \in [0,T]$ и $d_0 \in M \times M$ заданы и $v(t) \in M \times M$. Будем предполагать, что функция $a(t)$ непрерывна по t на $[0,T]$.

Требуется найти $v(t) = (V_1(t), V_2(t)) \in M \times M$, измеримое по t на $[0,T]$, так, чтобы в момент времени T $d(T)$ была ближе к заранее заданному элементу $z = (Z_1, Z_2) \in M \times M$.

Математически эта задача приводится к минимизации функционала

$$J(v) = \|d(T) - z\|^2_{ML_2} + \mu \int_0^T \|v(t)\|^2_{ML_2} \to \min, \tag{3}$$

при условиях

$$d'(t) = a(t)d(t) + v(t), t \in [0,T], \tag{4}$$

$$d(0) = d_0, \tag{5}$$

Класс управлений $v(t) = (V_1(t), V_2(t)) \in M \times M$, имеет вид

$$\begin{gathered} K = \{v = (V_1(t), V_2(t) \in M \times M,\ V_i^{(0)} \subset \\ \subset V_i \subset V_I^{(1)},\ i = 1,2,\ \dot{\forall} t \in [0,T]\} \end{gathered}. \tag{6}$$

Доказано, что если $v^* = (V_1^*(t), V_2^*) \in K$ дает минимум функционалу (3), при условиях (3), (5), то выполняется принцип максимума

$$g^*(t)\bullet v^*(t)-\mu\left\|v^*(t)\right\|^2 = \\ =\max_{v\in K}\left[g^*\bullet v-\mu\|v\|^2\right],\quad \dot\forall t\in(0,T) \tag{7}$$

Здесь

$$g^*(t)=-2[d^*(T)-z]\cdot e^{\int_t^T a(\tau)d\tau}$$

и $d^*=d^*(t)$ является решением задачи (3), (5) при $v=v^*(t)$ [1].

Учитывая, что множество K выпукло, из (5) можно получить условие оптимальности в виде интегрального неравенства

$$\int_0^T[-g^*(t)+2\mu v^*(t)]\bullet[v(t)-v^*(t)]dt\geq 0, \\ \forall v(t)=(V_1(t),V_2(t))\in K \tag{8}$$

Используя определение скалярного произведения это условие в можно написать в открытом виде

$$\int_0^T\int_{S_B}[c(t)(P_{D_1(T)}(x)-P_{D_2(T)}(x)-P_{Z_1}(x)+ \\ +P_{Z_2}(x))+2\mu(P_{V_1^*(t)}(x)-{}_{V_2^*(t)}(x))]\times \\ \times[P_{V_1(t)}(x)-P_{V_2(t)}(x)-P_{V_1^*(t)}(x)+P_{V_2^*(t)}(x)]dsdt\geq 0. \tag{9}$$

где $c(t)=e^{\int_t^T a(\tau)d\tau}$.

На основе формулы (6) можно предложить следующий численный алгоритм для решения задачи (4), (5). Отметим, что, если множество K имеет вид (6), то условие

$$V_i^{(0)}\subset V_i\subset V_I^{(1)},\ i=1,2,\ \dot\forall t\in[0,T]$$

эквивалентно следующему условию

$$P_i^{(0)}(x)\leq P_i(t,x)\leq P_i^{(1)}(x),\quad x\in S_B$$

Здесь, соответственно через $P_i^{(0)}(x),\ P_i^{(0)}(x)$ обозначены опорные функции множества $V_i^{(0)},\ V_I^{(1)},\ i=1,2$, фигурирующие в (6).

Шаг 1. Выбираем начальное управление пар областей $v^{(0)}=(V_1^{(0)},V_2^{(0)})$ удовлетворяющего ограничению (6). Считаем, что $v^{(m)}(t)=(V_1^{(m)}(t),\,V_2^{(m)}(t))\in K,\ m=0,1,2,...$ уже известно.

Шаг 2. Решив задачи (3), (5) при $v=v^{(m)}$, находим $d_m(t)$.

Шаг 3. Находим выпуклые положительно однородные функции $P_i^{(m)}x)$, как решение задачи

$$\mathrm{I_m}=\int_0^T\int_{S_B}A_m(t,x)[P_1(x)-P_2(x)]dsdt\to\min \tag{10}$$

при условиях

$$P_i^{(0)}(x)\leq P_i(t,x)\leq P_i^{(1)}(x),\quad x\in S_B. \tag{11}$$

где

$$A_m(t,x)=c(t)(P_{D_1^{(m)}(T)}(x)-P_{D_2^{(m)}(T)}(x)-P_{Z_1}(x) \\ +P_{Z_2}(x))+2\mu(P_{V_1^{(m)}}(x)-P_{V_2^{(m)}}(x))$$

Шаг 4. Вспомогательный элемент $\bar v^{(m)}(t)=(\bar V_1{}^{(m)}(t),\,\bar V_2{}^{(m)}(t))$ находится как субдифференциал функции $P_i^{(m)}(t,x)$ в точке $0\in R^n$ ([…]), т.е.

$$\bar V_i^{(m)}(t)=\partial P_i^{(m)}(0)=\left\{l\in R^n: P_i^{(m)}(t,x)\geq(l,x),\ \ \forall x\in R^n\right\}. \tag{12}$$

Шаг 5. Следующий элемент $v^{(m+1)}(t) = (V_1^{(m+1)}(t), V_2^{(m+1)}(t))$ определяется из следующего соотношения

$$V_i^{(m+1)} = (1-\mu_m)V_i^{(m)} + \mu_m \bar{V}_i^{(m)}, \quad 0 \le \mu_m \le 1, \tag{13}$$

где μ_m выбирается из условия

$$J(v^{(m+1)}) \le J(v^{(m)}).$$

Итерация продолжается до выполнения некоторого критерия точности .

Критерием точности может быть

$$\left\| v^{(m+1)} - v^{(m)} \right\|_{ML_2} \le \varepsilon, \ \dot{\forall} t \in (0,T)$$

или

$$\left| J(v^{(m+1)}) \le J(v^{(m)}) \right| \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ заданное число.

Доказательство сходимости метода аналогично доказательству метода условного градиента и поэтому мы не проводим ее здесь.

Самый трудный этап в этом алгоритме является минимизация функционала (8) при условиях (9). Для решения этой задачи, она сначала приводится к дискретной задаче [2]

.

Для этого разобъем отрезок [0,T] на N частей с шагом $h = \frac{T}{N}$. Обозначим $t_k = kh, \ k = 1,2...,N$

. Тогда используя формулу

$$\int_0^1 f(\alpha)d\alpha = h\sum_{k=1}^{N} f_k ,$$

где $f_k = f(t_k)$, интеграл (8) можно дискретизировать по t. Для дискретизации по x, с помощью точек $x_1, x_2, ..., x_M$ границу сферы S_B разобьем на M частей. Соединяя эти точки, мы получим M-угольник.

Тогда граничный интеграл можно заменять суммой

$$\int_{S_B} g(x)ds \approx \Delta s \sum_{i=1}^{M} g_i .$$

Тогда функционал (8) можно аппроксимировать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} A_{ij}^{(m)} \cdot [P_{ij}^{(1)} - P_{ij}^{(2)}] \to \min. \tag{14}$$

Здесь $A_{ij}^{(m)} = A_m(t_i, x_j)$. Дискретизируя условие (9), имеем

$$\begin{aligned} &P_{1j}^{(0)} \le P_{ij}^{(1)}) \le P_{1j}^{(1)}(x), \\ &P_{2j}^{(0)} \le P_{ij}^{(2)}) \le P_{2j}^{(1)}(x), \ \ i = \overline{1,N} \ , \ \ j = \overline{1,M} \ . \end{aligned} \tag{15}$$

Как видно, задача (14), (15) является задачей линейного программирования. Для ее решения можно использовать пакет программы MATLAB.

Представляет интерес условие $V_2^{(0)} = V_2^{(1)} = \{0\}$. В этом случае

$P_2^{(0)}(x) = P_2^{(1)}(x) = 0, \quad x \in S_B$.

Тогда второй компонент управления отсутствует, т.е. $v(t) = (V(t),0)$. Это означает, что управление является множеством, Предположим заданный элемент $z, \ d$ также имеет вид: $z = (Z,0)$, $d_0 = (D_0,0)$

. Тогда из формулы (8) ясно, что в этом случае и решение задачи (4), (5) будет выпуклое множество, т.е. $d(t) = (D(t),0)$. В рассматриваемом случае задача о минимизации в шаге 3 получает вид

$$\mathrm{I_m} = \int_0^T \int_{S_B} A_m(t,x)P(x)dsdt \to \min \tag{16}$$

при условиях

$$P_1^{(0)}(x) \le P(t,x) \le P_1^{(1)}(x), \quad x \in S_B. \tag{17}$$

где

$$A_m(t,x) = c(t)(P_{D^{(m)}(T)}(x) - P_Z(x)) + 2\mu P_{V^{(m)}(t)}(x)$$

Теперь рассмотрим один простой пример, иллюстрирующий предложенный алгоритм.

Пример. Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(V) = \|D(T) - B_3\|^2 + \|V - B_2\|^2$$

при условиях

$$\dot{D}(t) = V(t), \quad t \in [0,1], \; D(0) = B_1.$$

Здесь через B_t обозначена шар с радиусом t с центром в начале координат. Ясно, что $B_t = tB_1$. Класс управлений имеет вид

$$K = \{v = (V(t),0):\; V \in M,\, B_1 \subset V \subset B_4, \quad \forall t \in [0,T]\}.$$

В рассматриваемом случае

$$a(t) = 0, \quad c(t) = e^{\int_t^T a(\tau)d\tau} = 1.$$

Ясно, что для рассматриваемой задачи оптимальной областью является шар $V^*(t) = B_2,\, t \in [0,1]$. Действительно, в этом случае $D^*(t) = (2t+1)B_1$ и значит $D^*(1) = 3B_1 = B_3$, т.е. $J_* = J(V^*) = 0$. Так как функционал неотрицателен, $V^*(t) = B_2,\, t \in [0,1]$ является оптимальным.

Теперь применяя предложенный алгоритм находим приближенное решение рассматриваемой задачи. Так как

$$P_{B_t}(x) = t\|x\|, \quad x \in R^n,$$

в шаге 3 выражение $A_m(t,x)$ будет иметь вид

$$A_m(t,x) = P_{D^{(m)}(1)}(x) - 3\|x\| + 2P_{V^{(m)}(t)}(x) - 4\|x\| =$$
$$= P_{D^{(m)}(1)}(x) + 2P_{V^{(m)}(t)}(x) - 7\|x\|.$$

Учитывая, что при $x \in S_B$, $\|x\| = 1$, ограничение (15) получает форму

$$1 \le P(t,x) \le 4, \quad x \in S_B. \tag{18}$$

Возьмем $V_0 = B_1$. Решая уравнение, находим

$$D^{(0)}(t) = (t+1)B_1, \quad D^{(0)}(1) = B_2 = 2B_1.$$

Тогда

$$A_0(t,x) = P_{D^{(0)}(1)}(x) + 2P_{V^{(0)}(t)}(x) - 7\|x\| =$$
$$= 2\|x\| + 2\|x\| - 7\|x\| = -3\|x\|.$$

Значит в шаге 3 мы должны минимизировать функционал

$$\mathrm{I_0} = -3\int_0^T \int_{S_B} \|x\| P(x)dsdt \to \min,$$

при условии (17). Ясно, что

$$P_0(x) = 4, \; x \in S_B.$$

Учитывая, что $x \in S_B$, $\|x\| = 1$, имеем $\overline{V}_0 = 4B_1 = B_4$. Взяв $\mu_m = \dfrac{1}{m+1}$ в (13), получим

$$V_1 = \frac{1}{2}V_0 + \frac{1}{2}\overline{V}_0 = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_4 = \frac{5}{2}B_1 = B_{2,5}.$$

В этом случае

$$D^{(1)}(t) = (2{,}5t+1)B_1, \quad D^{(1)}(1) = B_{2,5} = 2{,}5B_1,$$

$$A_1(t,x) = P_{D^{(1)}(1)}(x) + 2P_{V^{(1)}(t)}(x) - 7\|x\| =$$
$$= 2{,}5\|x\| + 5\|x\| - 7\|x\| = \|x\|.$$

Тогда минимизируя функционал

$$\mathrm{I}_0 = \int_0^T \int_{S_B} \|x\| P(x)\,ds\,dt \to \min,$$

при условии (18), получим

$$P_1(x) = 4, \; x \in S_B, \quad \overline{V}_1 = B_1.$$

Тогда

$$V_2 = \frac{2}{3}V_1 + \frac{1}{3}\overline{V}_1 = \frac{2}{3}B_{2,5} + \frac{1}{3}B_1 = 2B_1 = B_2.$$

Продолжая находим

$$D^{(2)}(t) = (2t+1)B_1, \quad D^{(2)}(1) = 3B_1,$$

$$A_2(t,x) = P_{D^{(2)}(1)}(x) + 2P_{V^{(2)}(t)}(x) - 7\|x\| =$$
$$= 3\|x\| + 4\|x\| - 7\|x\| = 0.$$

В этом случае не зависимо от выбора μ_m, имеем $V_3 = B_2$, $V_4 = B_2, ..$. Значит взяв $V_0 = B_1$, во второй итерации мы нашли оптимальное решение $V^* = B_2$.

Отметим, что при применении алгоритма, в основном получается приближенное решение, не точное. Например, если мы возьмем $V_0 = B_{3,5} = 3.5B_1$, то

$$D^{(0)}(t) = (3.5t+1)B_1, \quad D^{(0)}(1) = 4.5B_1.$$

Тогда

$$A_0(t,x) = P_{D^{(0)}(1)}(x) + 2P_{V^{(0)}(t)}(x) - 7\|x\| =$$
$$= 4.5\|x\| + 7\|x\| - 7\|x\| = 4.5\|x\|.$$

Значит в шаге 3 мы должны минимизировать функционал

$$\mathrm{I}_0 = 4.5\int_0^T \int_{S_B} \|x\| P(x)\,ds\,dt \to \min,$$

при условии (17). Тогда

$$P_0(x) = 1, \; x \in S_B, \; \overline{V}_0 = B_1,$$

$$V_1 = \frac{1}{2}V_0 + \frac{1}{2}\overline{V}_0 = \frac{1}{2}B_{3.5} + \frac{1}{2}B_1 = \frac{9}{4}B_1.$$

В этом случае

$$D^{(1)}(t) = (\frac{9}{4}t+1)B_1, \quad D^{(1)}(1) = \frac{13}{4}B_1,$$

$$A_1(t,x) = \frac{13}{4}\|x\| + \frac{9}{2}\|x\| - 7\|x\| = \frac{3}{4}\|x\|.$$

Проводя шаг 3 находим,

$$\overline{V}_1 = B_1, \quad V_2 = \frac{2}{3}V_1 + \frac{1}{3}\overline{V}_1 = \frac{11}{6}B_1.$$

Продолжая увидим, что последовательность областей V_m сходится к оптимальной области $V^* = B_2$
.

Теперь рассмотрим применение нейронных сетей к решению задач.
Пусть требуется минимизация функционала

$$J(v) = \left\|D(T) - Z\right\|^2 + \mu\int_0^T \left\|V(t)\right\|^2 \to \min, \tag{19}$$

при условиях

$$\dot{D}(t) = a(t)D(t) + V(t), t \in [0, T], \tag{20}$$

$$D(0) = D_0. \tag{21}$$

Здесь нормы $\left\|D(T) - Z\right\|^2$ и $\left\|V(t)\right\|^2$ означают

$$\left\|(D(T),0) - (Z,0)\right\|^2 = \int_{S_B} \left[P_{D(T)}(x) - P_Z(x)\right]^2 ds,$$

$$\left\|V(t)\right\|^2 = \int_{S_B} \left[P_{V(t)}(x)\right]^2 ds.$$

Класс управлений является область-функция $V = V(t)$, в которой $V(t) \in M$, $t \in [0, T]$, здесь M совокупность выпуклых замкнутых ограниченных множеств в R^n. Другими словами, на класс управлений не налагаются никакие ограничения и предполагаем, что решение рассматриваемой задачи, в указанном классе, существует. В этом случае из условия оптимальности (6) получается соотношение

$$c(t)P_{D(T)}(x) + 2\mu P_{V(t)}(x) = c(t)P_Z(x), \tag{22}$$

где $c(t) = e^{\int_t^T a(\tau)d\tau}$.

Таким образом, оптимальная пара определяется соотношением (19)-(21). Как видно, все эти соотношения задаются равенствами. Значит, мы можем предполагать, что при естественных условиях, решение задачи (19)-(21) непрерывно зависит от исходных данных. Также известно, что можно построить нейронную сеть, которая аппроксимирует непрерывное отображение с любой точностью . Используя это, решаем задачи **(**17)-(20) с помощью нейронных сетей.

Для этого сначала выбираем многослойную нейронную сеть и определяем ее весовые коэффициенты. Для этого используется в основном два подхода. Первый- аналитический, в котором весовые коэффициенты задаются по каким то формулам и другой, в котором весовые коэффициенты восстанавливаются в процессе обучения. Здесь мы будем использовать второй подход. В этом подходе точность решения зависит от количества входных и выходных данных и способа обучения нейронных сетей. Выбор входных и выходных данных является самым трудным и актуальным этапом при применении нейронных сетей.

Для применения нейронных сетей к решению задачи оптимального управления (17)-(19), нам нужны в достаточном количестве входные и выходные данные для процесса обучения. Как находим эти данные?

Здесь мы будем предлагать схему, для определения в достаточном количестве входные и выходные данные.

Исходные данные для задачи (17)-(19) являются $a(t)$, D_0, μ, Z. Задавая эти данные, определяется решение $V(t)$. Для различных исходных данных решать задачи (17)-(19) является проблематично, так как, нашей целью является найти решение этой задачи именно для конкретно заданного $a(t)$, D_0, μ, Z. Для определения входных и выходных данных применяем «обратный» подход. Константа $\mu \geq 0$ не варьируем, т.е. фиксируем. Возьмем область-функцию $D_1(t) \in M$, $t \in [0, T]$ и непрерывную функцию $a_1(t)$. Подставляя эти данные в уравнение (17) и начальное условие (18), находим $V_1(t)$ и

$$V_1(t) = \dot{D}_1(t) - a_1(t)D_1(t), \quad t \in [0, T], \tag{23}$$

$$D_1^{(0)} = D_1(0). \tag{24}$$

Учитывая в соотношении (22), найденное управление $V_1(t)$ имеем

$$P_{Z_1}(x) = P_{D_1(T)}(x) + \frac{2\mu}{c_1(t)} P_{V_1(t)}(x),\ x \in S_B. \qquad (25)$$

Здесь $c_1(t) = e^{\int_t^T a_1(\tau)d\tau}$. Условие (25) можно написать в эквивалентной форме

$$Z_1 = D_1(T) + \frac{2\mu}{c_1(t)} V_1,\ t \in [0,T].$$

Значит, мы нашли входные данные $a_1(t),\ D_1^{(0)},\ Z_1$, в которых решением задачи (19)-(21) является управление $V_1(t)$. Это есть соответствующий выходной данный. Однако, в этом процессе есть две проблемы. Первая,, выбранные область функция $D_1(t) \in M,\ t \in [0,T]$ и непрерывная функция $a_1(t)$ должны быть такими, чтобы найденная по формулам (22) область функция, для любого $t \in [0,T]$ была выпуклой. Второе, определяемое по формулам (24) множество не должно зависеть от t. Остается обеспечивать эти условия [3-5].

Для этого, например, можно взять в виде

$$D(t) = \beta_1(t)A_1 + \beta_2(t)A_2 + ... + \beta_m(t)A_m.$$

Здесь A_i некоторые выпуклые множества и $\beta_i(t),\ i = 1,2,...,m$, положительные , непрерывно-дифференцируемые функции. Из условий (21), (23), получим

$$V(t) = \sum_{i=1}^{m} [\beta_i'(t) - a(t)\beta_i(t)]A_i,$$

$$Z = D(T) + \frac{2\mu}{c(t)} \sum_{i=1}^{m} [\beta_i'(t) - a(t)\beta_i(t)]A_i,\ t \in [0,T].$$

Пусть функции $\mu_i(t),\ i = 1,2,...,m$, такие, что их можно представить в виде

$$\beta_i'(t) - a(t)\beta_i(t) = c(t)b_i,\ t \in [0,T], \qquad (26)$$

где $b_i \geq 0$. Тогда

$$V(t) = \sum_{i=1}^{m} c(t) b_i A_i,$$

$$Z = D(T) + 2\mu \sum_{i=1}^{m} b_i A_i.$$

Так как, $b_i \geq 0,\ c(t) \geq 0,\ \mu \geq 0$, вышеотмеченные два условия обеспечены.

Покажем, что существуют функции $\beta_i(t)$, которые удовлетворяют указанным условиям. Из уравнения (26) находим

$$\beta_i(t) = \exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau\right)\left[\beta_i(0) - b_i d(t)\right],$$

где

$$d(t) = \int_0^t \exp\left(-\int_0^\tau a(s)ds\right) c(\tau))d\tau.$$

Учитывая, что функция $d(t)$ непрерывна, существует число K, такое, что $d(t) \leq K,\ \forall t \in [0,T]$. Тогда взяв $b_i \geq 0$ любые и $\beta_i(0) \geq b_i K$, увидем, что $\beta_i(t) \geq 0,\ t \in [0,T]$.

Таким образом, взяв входные данные $a_1(t),\ D_1^{(0)},\ Z_1$, мы получили выходной данный $V_1(t)$. Взяв аналогично, сколь угодно входные

$a_1(t),\ D_1^{(0)},\ Z_1,$

$a_2(t),\ D_2^{(0)},\ Z_2,$

………………,

$a_p(t), D_p^{(0)},\ Z_p,$

мы находим выходные данные

$V_1(t), V_2(t),..., V_p(t)$.

Используя эти данные можно проводить процесс обучения нейронной сети и найти весовые коэффициенты. После построения сети можно решать задачи (19)- (21) с любыми конкретными данными. Качество решений и надежность нейронной сети зависит от качества выбора и количества p исходных данных. При увеличении p погрешность приближенного решения уменьшается.

Литература.

1. Белман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, – 1969, – 367 с.

2. Facchinetti G., Giove S., Pacchiarotti N. Optimization of a fuzzy non linear Function Soft. Computing Journal, – 2002; 6 (6): 476–480.

3. Niftiyev A. A., Zeynalov C. I., Majidzadeh K. Optimal using of a bounded area problem and its investigation by neural networks. Известия НАН Азерб.2010. No. 6. – P. 75–82.

4. Зейналов Дж. И. задачи нечеткого линейного программирования и применения нейронных сетей к ее решению. Вестник Сумгаитского Университета, 2011.– No. 2.

5. Aliev F.A., Niftiyev A.A., Zeynalov C.I. Optimal synthesis problem for the fuzz systems. Optimal control, applications and methods. Published online in WileyOnline Library (wileyonlinelibrary.com). DOI: 10.1002/oca.964.