ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.6:517.968.21

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ РИЧАРДСОНА В КВАДРАТУРНЫХ РЕШЕНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ II РОДА

Добровольский И. П.
Доктор физико-математических наук
Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия
e-mail: dipedip@gmail.com

Аннотация
Введены величины, отражающие эффективность проведения полиномиальной экстраполяции Ричардсона, и описан способ определения погрешности. На конкретном примере показано, что применение экстраполяции к решению интегральных уравнений II рода с помощью квадратурной формулы трапеций даёт решение с высокой точностью. С использованием формул интерполяции и аппроксимации решение представляется в аналитическом виде.
Ключевые слова: формула трапеций, показатель экстраполяции.

THE RICHARSON'S EXTRAPOLATION IN QUADRATURE SOLUTIONS OF THE INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND

Dobrovolsky I. P.
Doctor of physical and mathematical sciences
Institute of Physics of the Earth, RAS, Moscow, RUSSIA
e-mail: dipedip@gmail.com

Abstract
The quantities reflecting efficiency of carrying out polynomial extrapolation of Richardson are entered and the way of definition of an error is described. On concrete examples it is shown that application of Richardson's extrapolation to a solution of integral equations of II kind has appeared rather effective and gives a solution with a high exactitude. With use of formulas of interpolation and approximation the decision is presented in the analytical form.
Keywords the trapezoidal rule, the index of Richardson's extrapolation.

1. Введение. Численные методы приближённого решения привлекательны своей универсальностью. В численных методах ставятся три задачи: получение достаточно точных решений, контроль точности и алгоритмическая простота процедур. Экстраполяция Ричардсона решает эти задачи. Первой работой на эту тему была [1]. С тех пор опубликовано много работ (например, [2]) и нет необходимости делать ещё один обзор. Однако до сих пор в литературе по интегральным уравнениям нет даже упоминания о возможности применении экстраполяции Ричардсона к квадратурным решениям интегральных уравнений, хотя эта возможность почти очевидна.

Цель статьи – построить процедуру экстраполяции Ричардсона, введением новых величин указать способ оценки погрешности и применить эти результаты к численному решению интегральных уравнений второго рода.

2. О полиномиальной экстраполяции Ричардсона. Кратко напомним суть экстраполяции Ричардсона.

Существуют задачи из разных разделов математики, где разность между точным φ и приближённым ψ решениями, т. е. погрешность вычислений r, при достаточной гладкости функций задачи имеет разложение

$$r(h) = \varphi - \psi(h) = \sum_{n=1}^{k} v_n h^{sn} + o(h^{sk}) \quad (2.1)$$

где h обычно является шагом сетки.

Исходное приближённое решение обозначается как

$$\psi(h_i) = \psi_i^{(0)} \quad (2.2)$$

и называется *экстраполяцией нулевого порядка*.

Экстраполяция j-того порядка, убирающая первых j слагаемых в разложении (2.1), вычисляется по рекуррентной формуле

$$\psi_i^{(j)} = \frac{h_i^s \psi_{i+1}^{(j-1)} - h_{i+1}^s \psi_i^{(j-1)}}{h_i^s - h_{i+1}^s} \quad (2.3)$$

где $h_{i+1} < h_i$.

В результате строится таблица экстраполяций

$$\begin{array}{llll} \psi_1^{(0)} & \psi_1^{(1)} & \psi_1^{(2)} \cdots \psi_1^{(m)} & \\ \psi_2^{(0)} & \psi_2^{(1)} & \vdots & \\ \psi_3^{(0)} & \vdots & \psi_{m-2}^{(2)} & \\ \vdots & \psi_{m-1}^{(1)} & & \\ \psi_m^{(0)} & & & \end{array} \qquad (2.4)$$

3. Анализ таблицы экстраполяций в частном случае. Практическое значение имеет случай, когда величины h образуют геометрическую прогрессию

$$h_i = \frac{h_1}{q^{i-1}}. \qquad (3.1)$$

Тогда (2.3) получает вид

$$\psi_i^{(j+1)} = \frac{q^{s(j+1)}\psi_{i+1}^{(j)} - \psi_i^{(j)}}{q^{s(j+1)} - 1}. \qquad (3.2)$$

В этом случае из (3.2) и (2.1) получаем

$$r_i^{(j)} = \varphi - \psi_i^{(j)} = \sum_{n=j+1} a_{jn} q^{-sn(i-1)} \qquad (3.3)$$

где отсутствие верхнего предела у знака суммы означает, что остаточный член включён в эту сумму.

Из (3.3) следует

$$\Delta_i^{(j)} = \psi_i^{(j)} - \psi_{i+1}^{(j)} = -\sum_{n=j+1} a_{jn} B_n q^{-sn(i-1)} \qquad (3.4)$$

где $B_n = 1 - q^{-sn}$.

Поскольку $B_n \approx 1$, то имеем очевидное соотношение

$$r_i^{(j)} \approx -\Delta_i^{(j)} \qquad (3.5)$$

Исходя из формулы (3.4), можно построить таблицу $\Delta_i^{(j)}$.

Очевидно, при уменьшении h наступает такой момент, когда слагаемые в разложении (3.3) начинают монотонно убывать. Назовём этот режим *регулярным*. Если экстраполяция вышла на регулярный режим, то в разложении (3.5) вносит основной вклад первый член. Тогда должно соблюдаться отношение

$$\delta_i^{(j)} = \frac{\Delta_i^{(j)}}{\Delta_{i+1}^{(j)}} \approx q^{s(j+1)}. \qquad (3.6)$$

И наоборот: если соотношение (3.6) соблюдается, то мы имеем регулярный режим. $\delta_i^{(j)}$ это оценка степени убывания погрешности в столбце. Очевидно, $\delta_i^{(j)} \to q^{s(j+1)}$ при $h \to 0$. По формуле (3.6) строится таблица $\delta_i^{(j)}$.

Назовём *показателем экстраполяции* $R_i^{(j)}$ отношение

$$R_i^{(j)} = \frac{r_i^{(j+1)}}{r_{i+1}^{(j)}}. \qquad (3.7)$$

Экстраполяция уменьшает погрешность $\psi_i^{(j+1)}$ по сравнению с $\psi_{i+1}^{(j)}$, когда $\left|R_i^{(j)}\right| < 1$.

Введём величину

$$\gamma_i^{(j)} = 1 - \frac{\delta_i^{(j)}}{q^{s(j+1)}} = 1 - \frac{\Delta_i^{(j)}}{q^{s(j+1)}\Delta_{i+1}^{(j)}} \qquad (3.8)$$

и определим её смысл.

Из (3.8) имеем

$$\Delta_{i+1}^{(j)} = \frac{\Delta_i^{(j)}}{q^{s(j+1)}(1-\gamma_i^{(j)})}. \qquad (3.9)$$

Подставив (3.9) в (3.2), получим

$$\Delta_i^{(j+1)} = \frac{\Delta_i^{(j)}\gamma_i^{(j)}}{(q^{s(j+1)}-1)(1-\gamma_i^{(j)})}. \qquad (3.10)$$

Теперь из (3.4), (3.7), (3.9) и (3.10) следует

$$R_i^{(j)} = \frac{r_i^{(j+1)}}{r_{i+1}^{(j)}} \approx \frac{\Delta_i^{(j+1)}}{\Delta_{i+1}^{(j)}} = \frac{q^{s(j+1)}}{q^{s(j+1)}-1}\gamma_i^{(j)}. \qquad (3.11)$$

Таким образом, величина $\gamma_i^{(j)}$ даёт оценку показателю экстраполяции. По формуле (3.8) можно построить таблицу $\gamma_i^{(j)}$.

Оценка погрешности $r_i^{(j+1)}$ по формулам (3.11), (3.8), (3.5) и *предположению* $\gamma_i^{(j)} = \gamma_i^{(j-1)}$ определяется выражениями

$$r_i^{(j+1)} \approx -\frac{\Delta_i^{(j)}\gamma_i^{(j)}}{q^{s(j+1)}-1} = -\frac{\Delta_i^{(j)}\gamma_i^{(j-1)}}{q^{s(j+1)}-1} \qquad (3.12)$$

Исходя из (3.4) и определения (3.8) можно установить, что для $\gamma_i^{(j)}$ имеется разложение

$$\gamma_i^{(j)} = \frac{a_{j,j+2}B_{j+2}(1-q^s)}{a_{j,j+1}B_{j+1}}q^{-si} + \frac{\left(a_{j,j+1}a_{j,j+3}B_{j+1}B_{j+3} - a_{j,j+2}^2B_{j+2}^2\right)\left(1-q^s\right)}{a_{j,j+1}^2B_{j+1}^2}q^{-2si} + \dots, \quad (3.13)$$

где первое слагаемое в регулярном режиме является по величине определяющим.

Тогда из (3.13) следует

$$\frac{\gamma_i^{(j)}}{\gamma_{i+1}^{(j)}} \to q^s \quad при \quad i \to \infty \quad (3.14)$$

по всей таблице независимо от индекса j.

4. Пример. Численное решение интегрального уравнения Вольтера. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра II рода

$$y(x) - \int_0^x K(x,t)y(t)dt = f(x) \quad (4.1)$$

где $f(x) = (1-xe^{2x})\cos 1 - e^{2x}\sin 1$ и $K(x,t) = 1-(x-t)e^{2x}$.

Это уравнение имеет точное решение

$$y(x) = e^x\cos e^x - e^{2x}\sin e^x. \quad (4.2)$$

Процедура решения уравнений Вольтера II рода с применением формулы трапеций известна (например, [3]). При вычислении интегралов по формуле трапеций имеет место разложение (2.1) при s = 2. Если принять q = 2, то каждый предыдущий набор точек содержится в последующем и это даёт техническую возможность применения экстраполяции к начальному набору точек. Будем обозначать приближённое решение уравнения (4.1) при вычислении интегралов по формуле трапеций с экстраполяцией через $\overline{y}_i^{(j)}$. Тогда (3.3) записывается как

$$r_i^{(j)}(x) = y(x) - \overline{y}_i^{(j)}(x) = \sum_{n=j+1} 4^{-n(i-1)}a_{jn}(x) \quad (4.3)$$

и (3.2) как

$$\overline{y}_i^{(j+1)} = \frac{4^{(j+1)}\overline{y}_{i+1}^{(j)} - \overline{y}_i^{(j)}}{4^{(j+1)}-1}. \quad (4.4)$$

Иногда удобнее пользоваться «прямыми» формулами

$$\begin{aligned}
\overline{y}_i^{(1)} &= \frac{4\overline{y}_{i+1}^{(0)} - \overline{y}_i^{(0)}}{3}\\
\overline{y}_i^{(2)} &= \frac{64\overline{y}_{i+2}^{(0)} - 20\overline{y}_{i+1}^{(0)} + \overline{y}_i^{(0)}}{45}\\
\overline{y}_i^{(3)} &= \frac{4096\overline{y}_{i+3}^{(0)} - 1344\overline{y}_{i+2}^{(0)} + 84\overline{y}_{i+1}^{(0)} - \overline{y}_i^{(0)}}{2835}\\
\overline{y}_i^{(4)} &= \frac{1048576\overline{y}_{i+4}^{(0)} - 348160\overline{y}_{i+3}^{(0)} + 22848\overline{y}_{i+2}^{(0)} - 340\overline{y}_{i+1}^{(0)} + \overline{y}_i^{(0)}}{722925}
\end{aligned} \quad (4.5)$$

которые получаются последовательным применением формулы (4.4).

Рассмотрим (4.1) на отрезке x = 0÷2.5 с шагом $h_i = 2.5/N_i$. Ниже приводятся таблицы экстраполяций и других величин по формулам предыдущего раздела. Таблица $\Delta_i^{(j)}$ строится по формуле (3.5), таблица $\delta_i^{(j)}$ – по формуле (3.6), таблица $\gamma_i^{(j)}$ – по формуле (3.8). Все вычисления производились с 15-ю значащими цифрами, но для краткости в приведённых таблицах числа округлены.

Таблица 1. Таблица экстраполяций $\overline{y}_i^{(j)}$ в точке x = 2.5. Жирным шрифтом показано точное значение.

i	N_i	$\overline{y}_i^{(0)}$	$\overline{y}_i^{(1)}$	$\overline{y}_i^{(2)}$	$\overline{y}_i^{(3)}$	$\overline{y}_i^{(4)}$
1	50	59.1571	67.002589	66.87888352	66.879216515	66.8792162898715
2	100	65.0412	66.886615	66.87921131	66.879216290	
3	200	66.4252	66.879674	66.87921621		
4	400	66.7660	66.879244			
5	800	66.8509				**66.8792162899017**

Таблица 2. Таблица $\Delta_i^{(j)}$.

i	$\Delta_i^{(0)}$	$\Delta_i^{(1)}$	$\Delta_i^{(2)}$	$\Delta_i^{(3)}$
1	-5.8841	0.11597	–0.00032779	0.22474×10^{-6}
2	-1.3840	0.0069411	-0.49005×10^{-5}	
3	-0.34081	0.00042923		
4	-0.08488			

Таблица 3. Таблица $\delta_i^{(j)}$.

i	$\delta_i^{(0)}$	$\delta_i^{(1)}$	$\delta_i^{(2)}$
1	4.2514	16.708	66.889
2	4.0611	16.171	
3	4.0152		

Таблица 4. Таблица $\gamma_i^{(j)}$.

i	$\gamma_i^{(0)}$	$\gamma_i^{(1)}$	$\gamma_i^{(2)}$
1	-0.062845	-0.044273	-0.045144
2	-0.015275	-0.010703	
3	-0.0037927		

Анализ таблиц приводит к содержательным выводам. Из таблиц 1 и 2 следует, что $\bar{y}_1^{(4)}$ является наиболее точным значением. Из таблицы 3 видно, что оценка (3.6) неплохо соблюдается. Из таблицы 4 следует, что $\gamma_i^{(j)}$ мало зависит от *j* при каждом *i*. Теперь можно сделать оценку погрешности $\bar{y}_i^{(4)}$ при $x = 2.5$. Из (3.12) имеем

$$r_1^{(4)} \approx \frac{\Delta_1^{(3)}\gamma_1^{(2)}}{255} = 0.40\cdot10^{-10} \qquad (4.6)$$

Истинная погрешность составляет $0.30\cdot10^{-10}$.

Мы получили высокоточное решение в отдельных точках. Сделаем равномерную выборку из $\bar{y}_2^{(3)}$ с шагом 0.1 (26 точек) и проведём для них интерполяцию Тиле непрерывными дробями (команда *ThieleInterpolation* математических программ *Maple*). Интерполяцию непрерывными дробями обозначим $\tilde{y}_2^{(3)}(x)$, а $\bar{y}_1^{(4)}$ будет служить контрольным значением. Эти результаты представлены в таблице 5.

Таблица 5. Интерполяция, $\bar{y}_1^{(4)}$ и точное решение. При $x = 2.488$ интерполяция даёт наибольшую погрешность.

	$x = 2.488$	$x = 2.45$	$x = 2.35$	$x = 1.95$
$\tilde{y}_2^{(3)}(x)$	83.53814	117.853257	68.052110	–28.347394668
$\bar{y}_1^{(4)}$		117.853249796849	68.05210963589	–28.3473946668611
$y(x)$	83.53832	117.853249796861	68.05210963599	–28.3473946668607

5. Заключение. Анализ таблиц экстраполяций для уравнения Фредгольма, очевидно, аналогичен анализу таблиц для уравнения Вольтерра.

Экстраполяция Ричардсона снимает вопрос о применении схем высокого порядка точности к уравнениям Вольтерра, который на протяжении нескольких десятилетий не имел приличного решения. Для уравнений Фредгольма, по существу, показано, что не имеет смысла пользоваться квадратурными схемами высокого порядка точности. Целесообразно производить вычисления по формуле трапеций и последующей экстраполяцией повышать порядок точности, одновременно приобретая неплохой контроль реальной погрешности.

Применение вычислительных схем высокой точности даёт эффект лишь при высокой гладкости функций задачи, и экстраполяция Ричардсона не является исключением. Если формально применить экстраполяцию Ричардсона к задаче с негладкими функциями, то такая ситуация отразится на таблице экстраполяций и производных таблицах – экстраполяция не будет улучшать точность и не будут соблюдаться закономерности, установленные в разделе 3.

В результате экстраполяции Ричардсона мы получаем высокоточное решение в отдельных точках. В таком виде оно пригодно для построения графика, а также для проверки решений, полученных другими методами. Можно найти аналитические выражения для интерполяции или аппроксимации точечного решения. Практика показывает, что хорошей является интерполяция непрерывными дробями (интерполяция Тиле). Аналогичные результаты также получаются аппроксимацией полиномами.

Следует обратить особое внимание на случай, когда правая часть интегрального уравнения не является гладкой функцией, тогда как ядро является функцией высокой гладкости. В этом случае имеет смысл построить резольвенту для рассматриваемого ядра, используя известные уравнения для резольвенты. Точность построения резольвенты проверяется описанными выше способами.

Однако можно указать простой, универсальный и наглядный способ оценки точности вычисляемой резольвенты независимо от метода её получения. Выберем какую-нибудь функцию и, считая её решением интегрального уравнения с заданным ядром, вычислим правую часть уравнения. В результате получаем интегральное уравнение, для которого известно точное решение. Поскольку резольвента не зависит от вида правой части, то на таком уравнении построением его решения через резольвенту можно проверить точность приближённой резольвенты.

Литература

1. Richardson L. F., The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stress in a masonry dam. / Philos. Roy. Soc., London, 1910, Ser. A, v. 210, P. 307–357.

2. Stetter H. J. Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations. (Springer Tracts, vol. 23). Berlin-Heidelberg-New York: Springer. 1973.